118. Поставьте начальную задачу для уравнения колебаний на бесконечной прямой. В чем состоит метод распространяющихся волн?

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

Ну вот мы и поставили задачу. Это было несложно.

Теперь давайте её решать.
Давайте применим трюк «перейдём от одной пары переменных к другой».
От переменных x, t переходим к переменным ξ, η.
ξ = x-at
η = x+at.
Подставив, получим
$U_{\xi\eta} = 0$
Какой интересный дифур: смешанная производная 0.
Это значит, что U представима как $U(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, или, возвращаясь к старым переменным:
$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$.
Это мы решили дифур. Собственно, его мы научились решать ещё на механике, потому что это волновое уравнение, решение – две волны, одна бежит влево, другая вправо.

Но надо ещё, чтобы НУ выполнялись.

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x),$$

И теперь оказывается, что функции f_1 и f_2 вовсе не любые, а вполне определённые. Их сумма – это φ(x), а разность – первообразная от Ψ(x), делённая на a:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(z)dz + C.$$

Мы знаем сумму, мы знаем разность, можем найти сами f1 и f2:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)dz \right)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) - \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)dz \right)$$

Подставляем в решение дифура $u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$.
и получаем формулу Даламбера:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz.}$$

Формула Даламбера есть в вопросе 119:

119. Поставьте начальную задачу для однородного уравнения колебаний на бесконечной прямой. Напишите формулу Даламбера. Докажите теоремы существования, единственности и устойчивости решения.

Как доказывается теорема существования – ну подставьте решение, убедитесь, что оно работает.

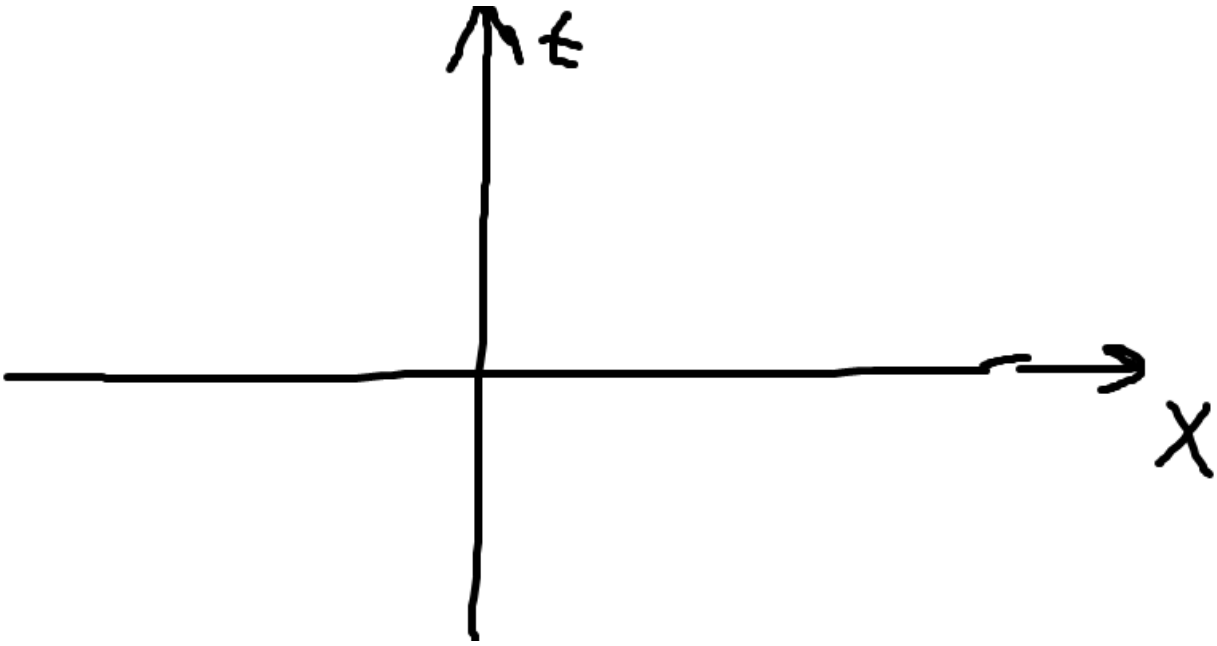
Как доказывается теорема единственности – показать экзаменатору процесс доказательства ф-лы Даламбера (см. выше). Если решение есть, то это только ф-ла Даламбера.

Вот устойчивость мне надо будет потом заботать.

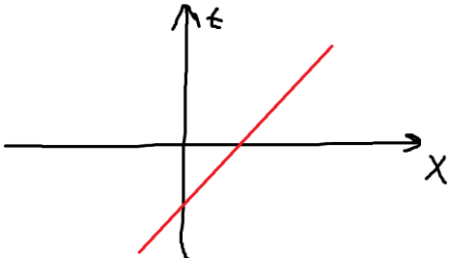
Теперь давайте заботаем вопрос 120.

120. Что такое “характеристический треугольник” на фазовой плоскости? В чем состоит метод интегрирования по фазовой плоскости.

Для начала надо понять, что такое сама фазовая плоскость. Это вот это вот

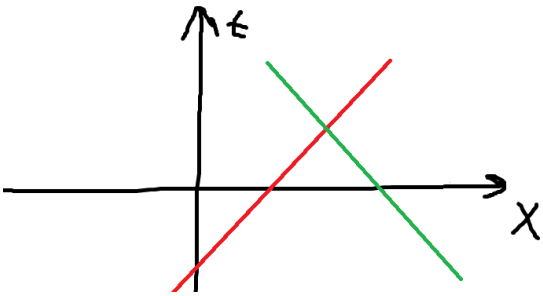


Пусть у нас есть функция φ(x-at). Это значит, что на любой прямой $x-at=C_1$ она будет принимать одно и то же значение.



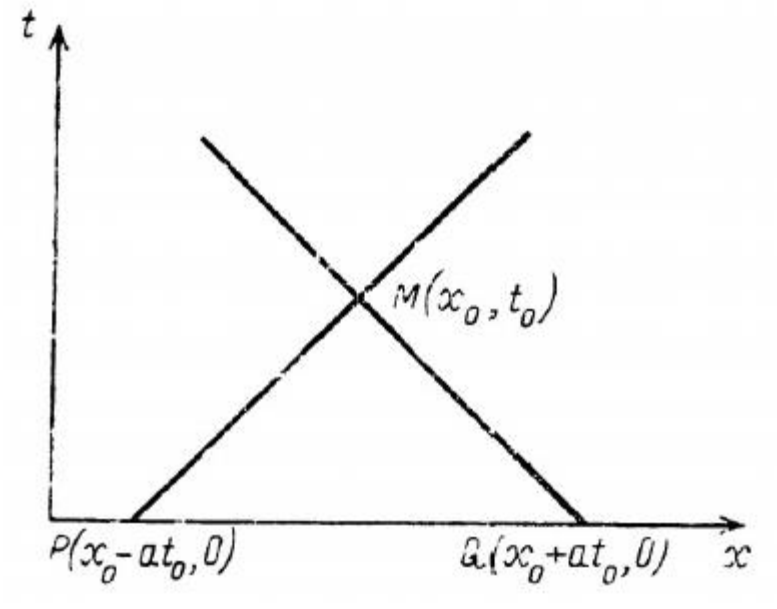
Например, на этом рисунке φ принимает одно и то же значение во всех точках красной прямой.

Пусть у нас есть функция φ(x+at). Это значит, что на любой прямой $x+at=C_2$ она будет принимать одно и то же значение.



Например, на этом рисунке φ принимает одно и то же значение во всех точках зелёной прямой.

Теперь возьмём любую точно на плоскости и проведём через неё две прямые:



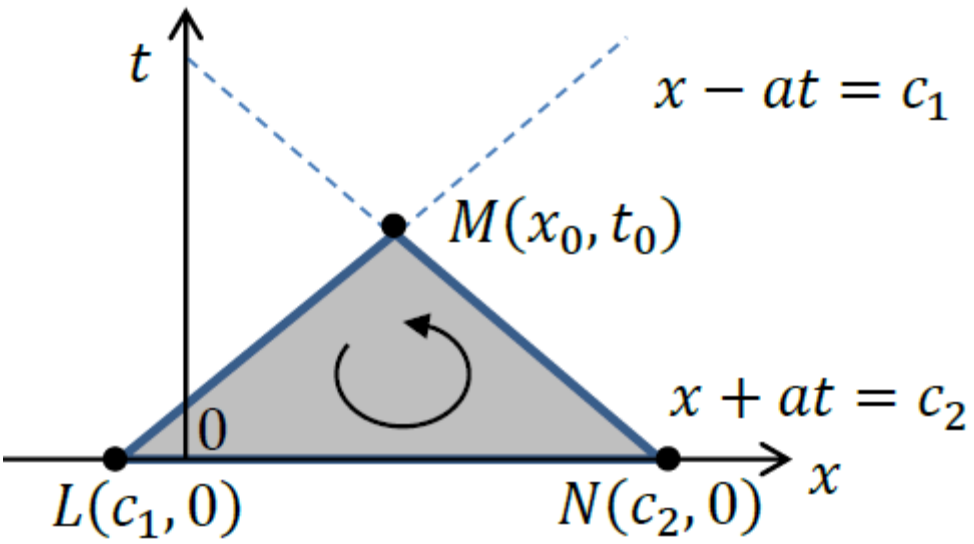
Получим на пересечении с осью абсцисс две точки - P и Q. Через них формула Даламбера записывается чуть красивей:

$$\boxed{u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{PQ} \psi(z)dz.}$$

Хорошо, а что же такое ***метод интегрирования*** по фазовой плоскости?
Он нужен для решения более сложного, неоднородного уравнения колебаний:
$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$.
Напомним физический смысл f(x,t) – линейная плотность силы, действующая на точку с абсциссой x в момент времени t.
Вот вопрос 121 как раз об этом

121. Выведите формулу для решения задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.

Этот вопрос расписан у Колыбасовой.
Кстати, точки характеристического треугольника у неё называются немного иначе:



Что ж, раз u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), давайте проинтегрируем это тождество по характеристическому треугольнику

$$\iint\limits_{\Delta MLN} (u_{tt} - a^2 u_{xx})\, dx\, dt = \iint\limits_{\Delta MLN} f(x,t)\, dx\, dt.$$

Теперь применим к левой части формулу Грина из матана-2:

$$\oint\limits_{C} P\, dx + Q\, dt = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}\right) dx\, dt,$$

(G – хар-кий треугольник, C – его граница).

Положим $P = -u_t$ и $Q = -a^2 u_x$. Тогда… можно я просто приведу выкладки Колыбасовой?

$$\iint\limits_{\Delta MLN} (u_{tt} - a^2 u_{xx})\, dx\, dt = \oint\limits_{MLN} (-u_t\, dx - a^2 u_x\, dt) =$$

$$= \int\limits_{ML} \left(-u_t \underbrace{dx}_{a\,dt} - a^2 u_x \underbrace{dt}_{\frac{dx}{a}}\right) + \int\limits_{LN} \left(-\underbrace{u_t}_{\psi(x)}\, dx - a^2 u_x \underbrace{dt}_{0}\right) + \int\limits_{NM} \left(-u_t \underbrace{dx}_{-a\,dt} - a^2 u_x \underbrace{dt}_{-\frac{dx}{a}}\right) =$$

$$= -a \int\limits_{ML} \underbrace{(u_t\, dt + u_x\, dx)}_{du} + a \int\limits_{NM} \underbrace{(u_t\, dt + u_x\, dx)}_{du} - \int\limits_{c_1}^{c_2} \psi(x)\, dx =$$

$$= -a[u(L) - u(M)] + a[u(M) - u(N)] - \int_{c_1}^{c_2} \psi(x)\,dx =$$

$$= 2au(M) - a\underbrace{u(L)}_{\varphi(c_1)} - a\underbrace{u(N)}_{\varphi(c_2)} - \int_{c_1}^{c_2} \psi(x)\,dx.$$

(Здесь мы учли, что на прямой ML выполняется равенство $dx = a\,dt$, а на прямой NM — равенство $dx = -a\,dt$.)

Теперь:

$$2au(M) - a\varphi(c_1) - a\varphi(c_2) - \int_{c_1}^{c_2} \psi(x)\,dx = \iint_{\Delta MLN} f(x,t)\,dx\,dt = \int_0^{t_0} dt \int_{c_1+at}^{c_2-at} f(x,t)\,dx,$$

откуда

$u(M) = u(x_0, t_0) =$

$$= \frac{\varphi(x_0 - at_0) + \varphi(x_0 + at_0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_0-at_0}^{x_0+at_0} \psi(x)\,dx + \frac{1}{2a}\int_0^{t_0} dt \int_{x_0-at_0+at}^{x_0+at_0-at} f(x,t)\,dx.$$

Если переобозначить x на ξ, t на τ и x_0 на x, y_0 на y, то

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^{t} d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\,.}$$

($c_1=x_0-at_0$, $c_2=x+at_0$).

Ничего сложного в выводе нет, его проще не запоминать, а просто запомнить идею (формула Грина) и на экзамене при необходимости вывести.

Отмечу, что мы попутно доказали формулу Даламбера (при f=0 получаем знакомую нам формулу), так что если вы забыли то доказательство – доказательство через фазовый треугольник лучше, оно более общее, потому что работает ещё и с неоднородностью.

Полученная нами формула особого названия не имеет. Ну, можно её назвать обобщённой формулой Даламбера (всё-таки просто формулой Даламбера, как сказал Боголюбов, называется формула для однородного дифура колебаний, без слагаемого с f).

Теперь давайте решать то же, но в 3D.

Отметим, что на семинарах мы уравнение колебаний в 3D не решали! Мы решали теплопроводность в 1D и 3D, а колебания только в 1D. И не случайно: сейчас тут пойдут убийственные формулы:

125. Поставьте задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве. Рассмотрите сферически симметричный случай.

Поставить несложно:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \triangle u + f(M,t), \\ u(M,0) = \varphi(M), \\ u_t(M,0) = \psi(M), \end{cases}$$

Сферически симметричный случай – это когда и f, и φ, и Ψ, определённые в каждой точке пространства (f ещё и в каждый момент времени), зависят лишь от r:

$$u(M,t) = u(r,t),$$

$$f(M,t) = f(r,t),$$

$$\varphi(M) = \varphi(r),$$

$$\psi(M) = \psi(r).$$

Это позволяет удачно перейти в сферическую СК. Лапласиан в сферической СК имеет очень поганый вид, но благодаря сферической симметрии у него будет только простая, радиальная часть:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r} \right) + f(r,t), & (r,t) \in \Omega_\infty^+, \\ u(r,0) = \varphi(r), & r \in \mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(r,0) = \psi(r), & r \in \mathbb{R}^+, \\ |u(0,t)| < \infty, & t \in [0,+\infty). \end{cases}$$

И тут очень удачной оказывается замена

$$u(r,t) = \frac{1}{r} v(r,t)$$

Ведь после неё задача сводится к

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r f(r,t), & (r,t) \in \Omega_\infty^+, \\ v(r,0) = r\varphi(r), & r \in \mathbb{R}^+, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(r,0) = r\psi(r), & r \in \mathbb{R}^+, \\ v(0,t) = 0, & t \in [0,+\infty). \end{cases}$$

Аналогу прямой! Получаем решение в виде двух волн

$$\frac{u(x-at)}{r}, \ \frac{u(x+at)}{r},$$

Исходящей и уходящей. В сферическо-симметричном случае всё просто! Всё, по 125 вопросу всё.

Гораздо сложнее несимметричный случай. И тут я приведу вам физическую аналогию.
Как нам проще всего создать сферически несимметричную ситуацию? Поставить какое-нибудь препятствие. Вспомните явление дифракции. Вот есть источник, от него пошла сферическая волна… а вот тот препятствие: фрагмент фронта, идущим под каким-то телесным углом, натыкается на стену. В этом случае происходит дифракция – отступление от законов геометрической оптики. Математически строго просчитать дифракцию ОЧЕНЬ сложно.

Как говорится, уберите от экрана детей. Я представляю вам формулу Кирхгофа

$$u(M_0,t_0)=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma}\left\{\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}\left(P,t_0-\frac{r_{PM_0}}{a}\right)-u\left(P,t_0-\frac{r_{PM_0}}{a}\right)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{ar_{PM_0}}\frac{\partial u}{\partial t}\left(P,t_0-\frac{r_{PM_0}}{a}\right)\frac{dr_{PM_0}}{dn_P}\right\}_{t=t_0-\frac{r_{PM_0}}{a}}d\sigma_P+$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{D}\frac{f\left(Q,t_0-\frac{r_{QM_0}}{a}\right)}{r_{QM_0}}dV_Q.$$

126. Выведите формулу Кирхгофа.

Если вам выпал вопрос 126… Ну… помянем ☺ Там надо с формулами Грина возиться.
В формуле Кирхгофа u в точке M_0 определяется возмущением на поверхности Σ, внутри которой находит M_0 (плюс также, если f ненулевая, ещё интегралу по объёму внутри этой поверхности, это самое последнее слагаемое).

Частным случаем формулы Кирхгофа является формулой Пуассона.

127. Выведите формулу Пуассона, описывающую процесс распространения колебаний в трехмерном пространстве.

В ней точка M_0 окружается не абы какой поверхностью, а сферой, центром которой является M_0 и радиусом at_0.

По сути, мы пытаемся применить формулу Кирхгофа для решения исходного дифура. От нас же хотят u(**r**,t) в каждой точке.

Давайте я всё-таки приведу вывод, а то вдруг вам 127 вопрос на экзамене выпадет. Берём в этом точке центр сферической СК, в качестве поверхности Σ сферу радиусам at_0 и терпеливо упрощаем формулу Кирхгофа:

$$\boxed{\begin{aligned} u(M_0,t_0) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma}\Bigg\{ & \frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}\left(P, t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}\right) - u\left(P, t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}\right)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right) + \\ & + \frac{1}{ar_{PM_0}}\frac{\partial u}{\partial t}\left(P, t_0 - \frac{r_{PM_0}}{a}\right)\frac{dr_{PM_0}}{dn_P}\Bigg\}_{t=t_0-\frac{r_{PM_0}}{a}} d\sigma_P + \\ & + \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{D}\frac{f\left(Q, t_0 - \frac{r_{QM_0}}{a}\right)}{r_{QM_0}}dV_Q. \end{aligned}}$$

Для начала заметим, что

$$u\left(P, t_0 - \frac{1}{a}r_{PM_0}\right) = u(P,0) = \varphi(P).$$

И, соответственно, две её частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(P, t_0 - \frac{1}{a}r_{PM_0}\right) = \psi(P),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left(P, t_0 - \frac{1}{a}r_{PM_0}\right) = \frac{\partial u}{\partial r}(P,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(P),$$

Подставляем всё это в формулу Кирхгофа:

$$\boxed{\begin{aligned} u(M_0,t_0) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma}\Bigg\{\frac{1}{r_{PM_0}}\qquad\frac{\partial\varphi}{\partial r}(P)\qquad - \qquad\varphi(P)\qquad\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\right) + \\ + \frac{1}{ar_{PM_0}}\qquad\psi(P)\qquad\frac{dr_{PM_0}}{dn_P}\Bigg\}_{t=t_0-\frac{r_{PM_0}}{a}} d\sigma_P + \\ + \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_D \frac{f\left(Q,t_0-\frac{r_{QM_0}}{a}\right)}{r_{QM_0}} dV_Q. \end{aligned}}$$

Я даже специально оставил пробелы, чтобы вы видели, где именно произошли упрощения. Последнее слагаемое с неоднородностью f останется навсегда таким, если что, и таким же перейдёт в формулу Пуассона.

Первые два слагаемых можно объединить в одно:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi)$$

φ – это не угол!!! Это функция из НУ!!!

К сожалению, вот такие вот обозначения неудачные. Я долго тупил по этому поводу. К тому же в конспекте Тич-ина опечатка:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}(r\varphi)$$

Естественно, никакой производной по ФУНКЦИИ φ нет и быть не может, это производная по r.

Формула ещё упрощается:

$$\begin{aligned} u(M_0,t_0) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma}\Bigg\{\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi) + \\ + \frac{1}{ar_{PM_0}}\qquad\psi(P)\qquad\frac{dr_{PM_0}}{dn_P}\Bigg\}_{t=t_0-\frac{r_{PM_0}}{a}} d\sigma_P + \\ + \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_D \frac{f\left(Q,t_0-\frac{r_{QM_0}}{a}\right)}{r_{QM_0}} dV_Q. \end{aligned}$$

Далее, если вы посмотрите у Боголюбова, он проделывает какие-то махинации, представляя $d\sigma=r^2*d\omega$, а затем возвращаясь к $d\sigma$.

Честно говоря, смысла их я так и не понял, да и сомнительны они:

$$= \frac{1}{4\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t_0} \int\limits_{\Omega} r\varphi \Big|_{r=at_0} d\omega + \int\limits_{\Omega} r\psi \Big|_{r=at_0} d\omega \right),$$

Откуда окончательно получаем:

$$u(M_0,t_0) = \frac{1}{4\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t_0} \int\limits_{\Sigma_{M_0}^{at_0}} \frac{\varphi(P)}{r_{PM_0}} d\sigma_P + \int\limits_{\Sigma_{M_0}^{at_0}} \frac{\psi(P)}{r_{PM_0}} d\sigma_P \right).$$

Здесь Боголюбов так лихо поделил числитель производной на r^2, забыв, что это с точки зрения производной не константа и её нельзя так просто вносить и выносить.

Как бы то ни было, в итоге мы получаем формулу Пуассона:

$$\boxed{\begin{aligned} u(M_0,t_0) = \frac{1}{4\pi a}\left\{ \frac{\partial}{\partial t_0} \oint\limits_{\Sigma_{M_0}^{at_0}} \frac{\varphi(P)}{r_{PM_0}}\Big|_{r=at_0} d\sigma_P + \oint\limits_{\Sigma_{M_0}^{at_0}} \frac{\psi(P)}{r_{PM_0}}\Big|_{r=at_0} d\sigma_P \right\} + \\ + \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{K_{M_0}^{at_0}} \frac{f\left(Q, t_0 - \frac{r_{QM_0}}{a}\right)}{r_{QM_0}} dV_Q. \end{aligned}}$$

Ну и напоследок

128. В чем состоит "метод спуска" Адамара?

Ответ: переход от 3D к 2D. Мы берём формулы Кирхгофа и Пуассона, заменяем везде поверхности кривыми, объёмы площадями, 4π на 2π.